نظریهٔ زبان‌ها و خودکاره‌ها
ماشین تورینگ

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

مقدمه

ماشین تورینگ «مت»
- مدلی قوی‌تر

۱۹۳۶

شبیه خم ولی با حافظهٔ بدون محدودیت

شبیه‌تر به رایانهٔ همه‌منظوره

هرچند ماشین تورینگ نیز قادر نیست بعضی مسائل را حل کند!
- رایانه نیز
- محدودیت‌های نظری رایانش

استفاده از نواری نامتناهی به عنوان حافظهٔ نامحدود

امکان حرکت نوک خواندن-نوشتن روی خانه‌ها به چپ یا راست
- نوار در ابتدا شامل رشته و بقیه جاها خالی
- تقسیم نوار به خانه‌هایی و هر خانه یک علامت در خود می‌گیرد.
- در صورت نیاز به ذخیره اطلاع،ذخیره روی نوار
- رد یا پذیرش رشته با رفتن به حالت پذیرش یا رد رخ می‌دهد
- گاهی اقات به حالت پذیرش یا رد وارد نمی‌شود و برای همیشه کار می‌کند

تفاوت «م‌ت» و «خ‌م»

ماشین تورینگ هم روی نوار می‌نویسد و هم می‌خواند

نوک خواندن-نوشتن به هر دو طرف چپ و راست حرکت می‌کند

نوار بی‌نهایت است

پذیرندهٔ زم، زم‌ام، زوب‌م، زب‌م

مثال

$\{w\#w : w \in \{0,1\}^*\}$

$0 \to x, 1 \to y$

$011000\#011000\sqcup$

$x11000\#011000\sqcup$

$x11000\#x11000\sqcup$

تعریف ماشین تورینگ

چندتائی $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{ن},q_{پ})$

Q: مجموعهٔ متناهی حالت‌ها

Σ: مجموعهٔ متناهی الفباء ورودی

Γ: مجموعهٔ متناهی الفباء نوار شامل علامت تهی و Σ

δ: تابع انتقال $\delta: Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\to , \leftarrow\}$

q_0: حالت آغاز

$q_{ن}$: همهٔ حالات به جز حالت پذیرش

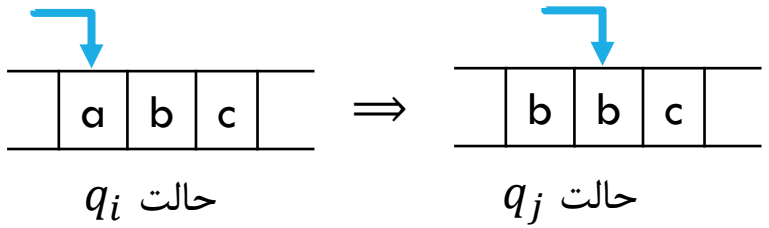
$q_{پ}$: حالت[یا حالات] پذیرش $q_{پ} \neq q_{ن}$

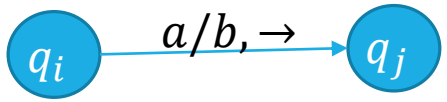
نوک خواندن/نوشتن در هر حرکت یک علامت را می‌خواند

$$\delta(q_i, a) = (q_j, b, \leftarrow)$$

دو ورودی
ماشین در حالت q_i، نوک با خواندن a، به حالت q_j می‌رود و و b را جانشین a می‌کند و به سمت چپ حرکت می‌کند.

$$\delta(q_i, a) = (q_j, b, \rightarrow)$$





مثال

$Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \Gamma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \cup\}, \mathrm{F} = \{q_1\}$

$\delta(q_0, a) = (q_0, b, \rightarrow)$

$\delta(q_0, b) = (q_0, b, \rightarrow)$

$\delta(q_0, \cup) = (q_1, \cup, \leftarrow)$

$q_0aa\cup \vdash bq_0a\cup \vdash bbq_0\cup \vdash bq_1b\cup$

ماشین تورینگ استاندارد

توصیف آنی

$M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{ن},q_{پ})$ ماشین تورینگ است. هر رشتهٔ $a_۱a_۲ \dots a_{k-1}q_۱a_ka_{k+1} \dots a_n$ با با $q_1 \in Q$ و $a_i \in \Gamma$ توصیف آنی باشد، آن‌گاه

- حرکت $a_۱a_۲ \dots a_{k-1}q_۱a_ka_{k+1} \dots a_n \vdash a_۱a_۲ \dots a_{k-1}bq_2a_{k+1} \dots a_n$ ممکن است اگر و فقط اگر $\delta(q_1,a_k) = (q_2,b,\rightarrow)$
- حرکت $a_۱a_۲ \dots a_{k-1}q_۱a_ka_{k+1} \dots a_n \vdash a_۱a_۲ \dots q_2a_{k-1}ba_{k+1} \dots a_n$ ممکن است اگر و فقط اگر $\delta(q_1,a_k) = (q_2,b,\leftarrow)$

حالت توقف

- ماشین M با شروع از وضعیت اولیهٔ $x_1q_2x_2$ متوقف می‌شود، اگر به $y_1q_jy_2$ برسد که به ازای هر a و q_j، $\delta(q_j,a)$ تعریف نشده باشد. $x_1q_2x_2 \overset{*}{\Rightarrow} y_1q_jy_2$
- رایانش (محاسبه) computation: دنباله‌ای از پیکربندی‌ها که به یک حالت توقف منجر می‌شود.
- حلقهٔ بی‌پایان $x_1q_2x_2 \overset{*}{\Rightarrow} \infty$

ماشین تورینگ استاندارد

تعریف‌های متفاوت

ماشین تورینگ دارای نواری که از هر دو سر نامتناهی است؛ پس هر تعداد حرکت به چپ یا راست ممکن است.

ماشین تورینگ معین است؛ به دیگر سخن، به ازای هر پیکربندی حداکثر یک حرکت تعریف می‌شود.

ورودی یا خروجی خاصی ندارد. نوار دارای محتوای مشخص است که بخشی از آن را می‌توان ورودی در نظر گرفت. وقتی که ماشین متوقف می‌شود، بخشی یا تمام نوار خروجی به حساب می‌آید.

توصیف آنی

تعریف ماشین تورینگ پذیرنده زبان

Acceptor

رشته روی نوار نوشته می‌شود و نوک خواندن –نوشتن روی سمت‌چپ‌ترین حرف w قرار می‌گیرد و با شروع از وضع q_0 اگر در حالت نهائی متوقف شود، w پذیرفته می‌شود.

$M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{ن},q_{پ})$ ماشین تورینگ است. آن‌گاه زبانی که M می‌پذیرد به صورت زیر است:

$$L(M) = \left\{w \in \Sigma^+ : q_0 w \overset{*}{\Rightarrow} x_1 q_{پ} x_2 ; x_1, x_2 \in \Gamma^*\right\}$$

اگر w عضو $L(M)$ نباشد

۱- ماشین در حالتی غیرپایانی متوقف می‌شود

۲- ماشین در حلقهٔ بی‌پایان می‌افتد و هرگز متوقف نمی‌شود.

تعریف ماشین تورینگ پذیرنده زبان

دستوراتی محدود

کارهایی که قادر به انجام آن‌هاست

- نوشتن مجدد حرف فعلی
- تغییر حالت کنترل
- حرکت نوک خواندن/نوشتن

با این وجود بسیار قدرتمند

شروع از حالت اولیه و با مقداری اطلاع روی نوار،

- امکان بررسی و یا تغییر محتوای خانه‌ها به دفعات
- امکان به پایان رسیدن فرآیند با رسیدن به «حالت توقف»
- نمونهٔ ماشینی حلقهٔ بی‌پایان

مثال

$a^n b^n, n \geq 1$

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{a, b, o, x, \cup\}$
- $\delta(q_0, a) = (q_1, x, \rightarrow)$
- $\delta(q_1, a) = (q_1, a, \rightarrow)$
- $\delta(q_1, o) = (q_1, o, \rightarrow)$
- $\delta(q_1, b) = (q_2, o, \leftarrow)$
- $\delta(q_2, o) = (q_2, o, \leftarrow)$
- $\delta(q_2, a) = (q_2, a, \leftarrow)$
- $\delta(q_2, x) = (q_0, x, \rightarrow)$
- $\delta(q_0, o) = (q_3, o, \rightarrow)$
- $\delta(q_3, o) = (q_3, o, \rightarrow)$
- $\delta(q_3, \cup) = (q_{پ}, \cup, \rightarrow)$

مثال

$a^n b^n c^n, n \geq 1$

شهود

مثال

$a(a+b)^*$

مثال

aba^*b

مثال

$$L = \{w: |w| \% 2 = 0\}$$

ترکیب ماشین‌های تورینگ جهت انجام کارهای پیچیده‌تر

ماشین تورینگ – مبدل TRANSDUCER

تاکنون تمرکز صرفا بر پذیرندگی زبان

مدل انتزاعی کامپیوتر دیجیتال

- هدف کامپیوتر تبدیل ورودی به خروجی

ورودی رایانش

- نشان‌های روی نوار در زمان آغاز،

خروجی رایانش

- آنچه در انتها روی نوار است

ماشین تورینگ – مبدل - *ادامه*

تعریف ماشین رایانش‌پذیر تورینگ (رایانش‌پذیر) Turing computable

تابع f با دامنه D که اگر ماشین تورینگ $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{ن},q_{پ})$ موجود باشد به طوری‌که

$$q_0 w \overset{*}{\Rightarrow}_M q_{پ} f\ (w)$$

تمامی توابع ریاضی

- رایانش‌پذیر تورینگ هستند

زبان برنامه نویسی رایانش‌پذیر تورینگ

- دارای قدرت یکسان

مثال – جمع دو عدد طبیعی X و Y

x+y

حل

ابتدا نوشتن اعداد به صورت دنباله‌ای از یک‌ها (یا هر علامت دیگری صرفا متمایز از جداساز)

- نمایش X=3 به صورت ۱۱۱
- نمایش Y=4 به صورت ۱۱۱۱
- طول رشته برابر مقدار x یا y

دو عدد روی نوار قرار می‌دهیم

- 11101111
- 0 بین آنها به معنای جداکننده

$$q_0 w\,(x)\,0 w\,(y) \overset{*}{\vdash} q_f w\,(x+y)\,0$$

مثال – جمع دو عدد طبیعی X و Y – ادامه

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_ن, q_پ)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_پ\}$

$$\delta(q_0,1) = (q_0,1,\rightarrow)$$

$$\delta(q_0,0) = (q_1,1,\rightarrow)$$

$$\delta(q_1,1) = (q_1,1,\rightarrow)$$

$$\delta(q_1,\cup) = (q_2,\cup,\leftarrow)$$

$$\delta(q_2,1) = (q_3,0,\leftarrow)$$

$$\delta(q_3,1) = (q_3,1,\leftarrow)$$

$$\delta(q_3,\cup) = (q_پ,\cup,\rightarrow)$$

مثال- رونوشت رشته‌های شامل ۱

مثال- مقایسه دو عدد طبیعی

مثال – ضرب دو عدد طبیعی X و Y

$x \times y$

حل

ابتدا نوشتن اعداد به صورت دنباله‌ای از یک‌ها (یا هر علامت دیگری صرفا متمایز از جداساز)

- نمایش X=3 به صورت ۱۱۱
- نمایش Y=4 به صورت ۱۱۱۱
- طول رشته برابر مقدار x یا y

دو عدد روی نوار قرار می‌دهیم

- 11101111
- 0 بین آنها به معنای جداکننده

مثال – ضرب دو عدد طبیعی X و Y

حل

نمایش به شیوه مثال جمع دو عدد

در انتهای عدد دوم افزودن علامت جداساز دیگر (مثلا 0) به جای علامت خالی

مثال – تشخیص طول رشته توانی از

$$A = \{0^{2^n} : n \geq 0\}$$

حل

- ابتدا به دنبال الگوئی برای تکرار رشته‌ای با طول از توان دو؟

- دو نیم کردن رشته اصلی
  - حذف یک نیمه
- ادامه روند قبل تا رسیدن به رشته به طول یک

0000	0000	000000
X0X0	X000	X00000
XXXX	X0X0	X0X000
	XXX0	X0X0X0
	XXXX	X0X0X0
		XXX0XX
		XXX0XX
		XXXXXX
		XXXXXX?

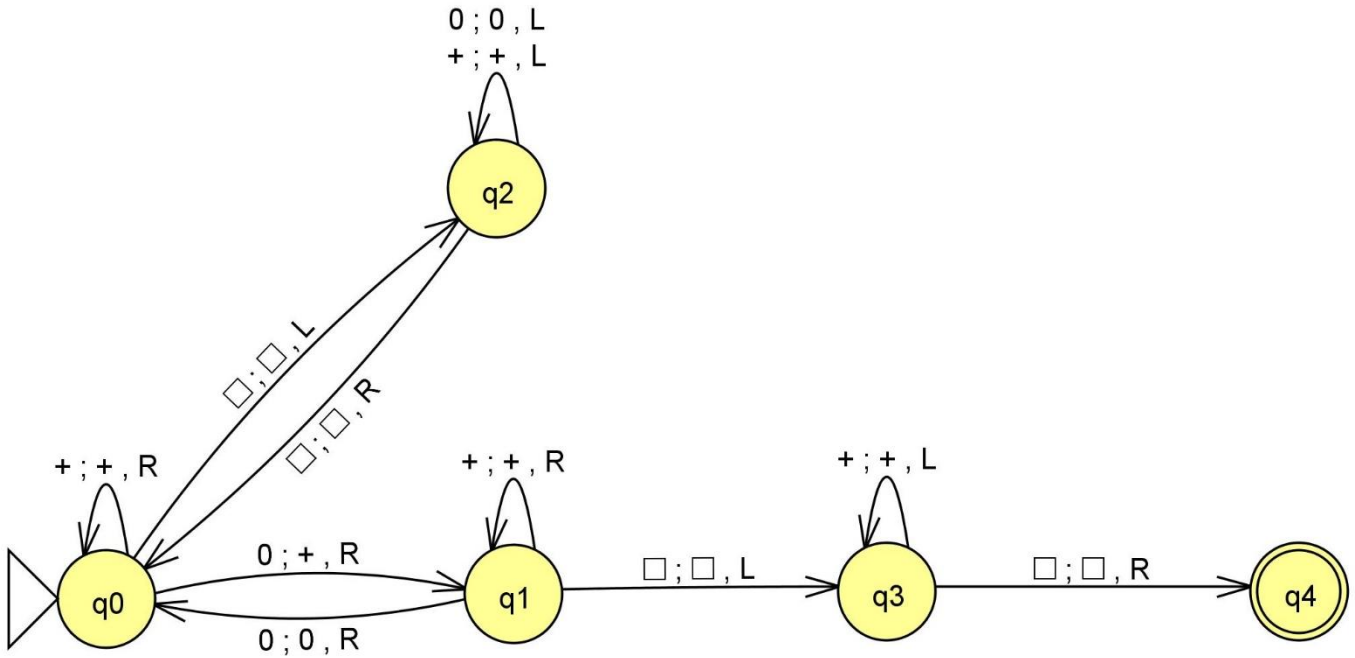
حذف به چه ترتیبی؟

0
00
0000
00000000
0000000000000000
00000000000000000000000000000000

مثال – تشخیص طول رشته توانی از دو

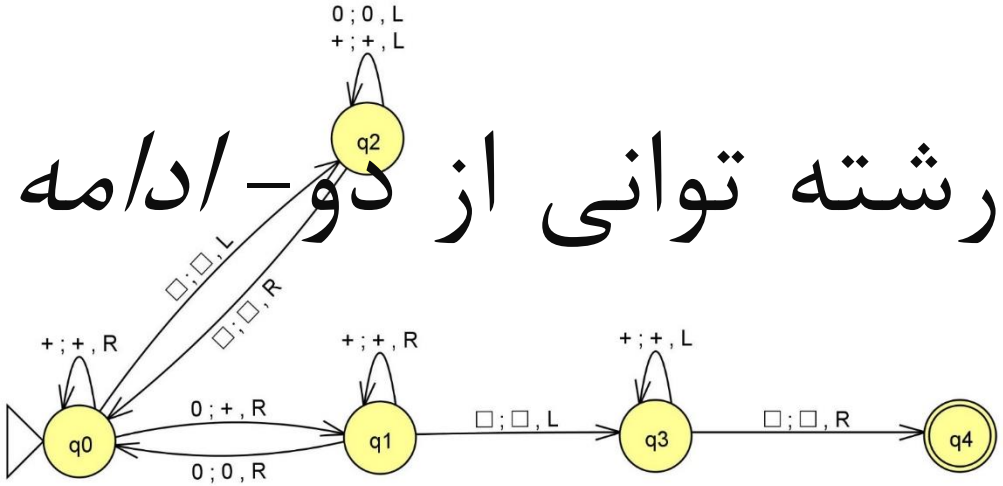
$$A = \{0^{2^n} : n \geq 0\}$$

حل



مثال – تشخیص طول رشته توانی از دو– *ادامه*

حل $A = \{0^{2^n} : n \geq 0\}$



- $q_0 0 \Rightarrow +q_1 \cup \Rightarrow q_3 + \Rightarrow q_3 \cup + \Rightarrow q_4 +$

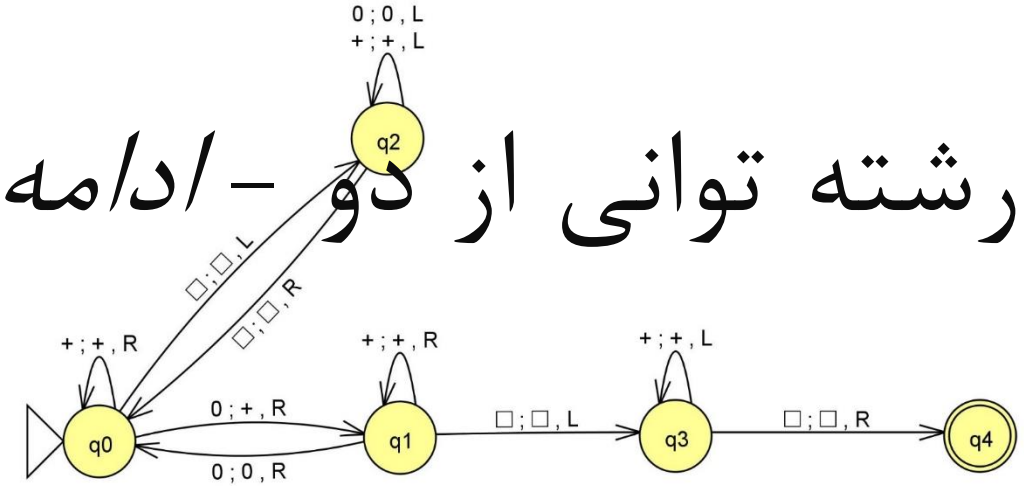
- $q_0 0000 \Rightarrow +q_1 000 \Rightarrow +0q_0 00 \Rightarrow +0+q_1 0 \Rightarrow +0+0q_0 \cup \overset{*}{\Rightarrow} q_2 + 0 + 0 \Rightarrow q_2 \cup + 0 + 0$

  $\Rightarrow q_0 + 0 + 0 \Rightarrow +q_0 0 + 0 \Rightarrow + +q_1 + 0 \Rightarrow ++ +q_1 0 \Rightarrow ++ +0q_0 \cup \overset{*}{\Rightarrow} \cup q_2 ++ +0$

  $\Rightarrow q_2 \cup ++ +0 \Rightarrow q_0 ++ +0 \overset{*}{\Rightarrow} ++ +q_0 0 \Rightarrow ++ +q_0 0 \Rightarrow +++ +q_1 \cup \Rightarrow ++ +q_3 + \overset{*}{\Rightarrow}$

$q_3 ++++ \Rightarrow q_3 \cup ++++ \Rightarrow q_4 +++ +$

مثال – تشخیص طول رشته توانی از دو – ادامه



حل $A = \{0^{2^n} : n \geq 0\}$

- $q_0000000 \Longrightarrow +q_100000 \Longrightarrow +0q_00000 \Longrightarrow +0+q_1000 \Longrightarrow +0+0q_000$

  $\Longrightarrow +0+0+q_10 \Longrightarrow +0+0+0q_0\cup \overset{*}{\Rightarrow} q_2+0+0+0 \Longrightarrow q_2\cup+0+0$

  $+0 \Longrightarrow q_0+0+0+0 \Longrightarrow +q_00+0+0 \Longrightarrow ++q_1+0+0 \Longrightarrow +++q_10$

  $+0 \Longrightarrow +++0q_0+0 \Longrightarrow \quad +++0+q_00 \Longrightarrow \quad +++0++q_1\cup \Longrightarrow \quad +$

  $++0+q_3+ \Longrightarrow \quad +++0q_3++ \Longrightarrow \quad +++q_30++$

تز چرچ-تورینگ

هر نوع رایانش که مکانیکی انجام‌پذیر باشد، با ماشین تورینگ نیز انجام‌پذیر است.

رایانش مکانیکی:

- رایانشی که اگر و فقط اگر با ماشین تورینگ انجام پذیرد.

تعریف الگوریتم

تابع $f: D \to R$، ماشین تورینگ M است که با داشتن ورودی $d \in D$ روی نوار ماشین مذکور، در نهایت با پاسخ صحیح $f(d) \in R$ روی نوار متوقف شود. به دیگر سخن

$$\forall d \in \mathrm{D}:\ q_0 d \vdash_M^* q_{\text{پ}} f(d), q_{\text{پ}} \in F$$

زبان تورینگ – تشخیص‌پذیر RECOGNIZABLE

در بعضی منابع زبان به طور بازگشتی شمارش‌پذیر

تعریف: زبانی که ماشین تورینگی آن را تشخیص دهد.

سه حالت در قبل رشتهٔ ورودی

- ورودی پذیرفته شود (ماشین در حالت پذیرش متوقف خواهد شد)
- ورودی پذیرفته نشود ولی ماشین در حالت غیرپذیرش توقف کند
- ورودی پذیرفته شود و در زمان متناهی متوقف نشود.

زبان تورینگ – تصمیم‌پذیر DECIDABLE

در بعضی منابع زبان بازگشتی

تعریف تصمیم‌گیری: ماشین روی تمام ورودی‌ها چه در صورت پذیرش چه در صورت رد کردن، متوقف خواهد شد.

تعریف زبان تورینگ-تصمیم‌پذیر:

- زبانی که ماشین تورینگی آن را تصمیم بگیرد.

دو حالت در قبل رشتهٔ ورودی

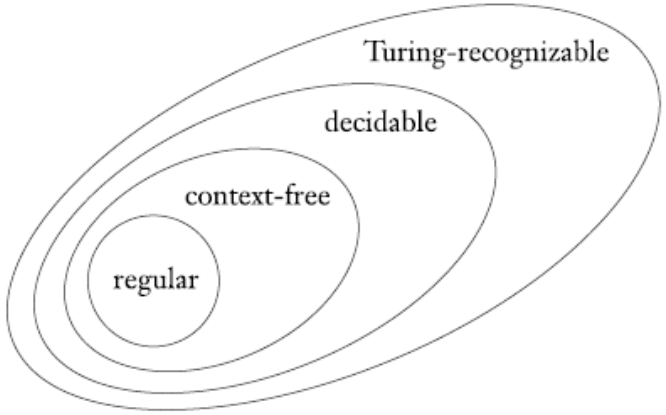
- ورودی پذیرفته شود (ماشین در حالت پذیرش متوقف خواهد شد)
- ورودی پذیرفته نشود (ولی ماشین در حالت غیرپذیرش توقف کند)
  - در بعضی منابع افزودن حالت رد و در صورت پذیرفته نشدن ماشین در حالت رد

زبان تورینگ – تصمیم‌پذیر در مقابل تورینگ-تشخیص‌پذیر

بعضی زبان‌ها تشخیص‌پذیرند ولی تصمیم‌ناپذیرند

قضیه: مسئلهٔ اینکه زبان مستقل از متنی رشته‌ای را تولید می‌کند، تصمیم‌پذیر است

قضیه: مسئله اینکه ماشین تورینگی یک رشتهٔ ورودی را می‌پذیرد یا نه، تشخیص‌پذیر است.



انواع دیگر ماشین‌های تورینگ

صرفا تعریف ماشین تورینگِ معینِ تک‌نوارهٔ نامحدود (از اینجا به اختصار ماشین تورینگ)

مدل‌های دیگر

همگی دارای قدرت یکسان با ماشین تورینگ ماشین تورینگ معرفی شده

ماشین تورینگ با حالت ایست

همه‌چیز شبیه ماشین تورینگ به جز تابع انتقال

$$\delta: Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\rightarrow , \leftarrow , \downarrow\}$$

دارای قدرت یکسان با ماشین با ماشین تورینگ

- اثبات؟
- جانشینی هر حالت ایست با دو حالت چپ و راست بدون تغییر حرف الفبا؟

ماشین تورینگ با نوار نیمه متناهی

نوار از یک طرف گسترش می‌یابد

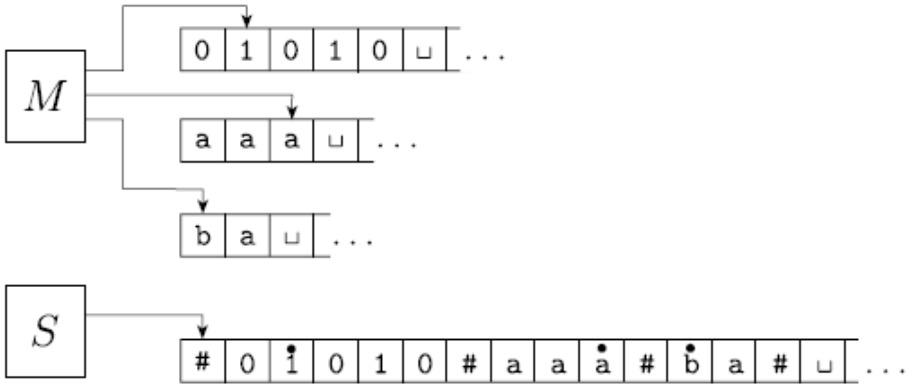
ماشین تورینگ با حافظه پیچیده‌تر

ماشین تورینگ چند نواره

$$\delta: Q \times \Gamma^{k} \rightarrow Q \times \Gamma^{k} \times \{\rightarrow, \leftarrow\}^{k}$$
$$\delta(q_i, a_1, \ldots, ak) = (qj, b_1, \ldots, bk, \rightarrow, \leftarrow, \ldots \rightarrow$$

قضیه هر ماشین تورینگ چندنواره، ماشین تورینگ تک‌نواره متناظر دارد.

اثبات؟



ماشین تورینگ نامعین

$$\delta: Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{\rightarrow, \leftarrow\}}$$

قضیه هر ماشین تورینگ نامعین، ماشین تورینگ معین متناظر دارد.

- اثبات؟ تخصیص تورینگ چند نواره که پیکربندی‌های مختلف را بتوان پیگیری کرد

ماشین تورینگ جامع

خودکاره کراندار خطی

ماشین تورینگ نامعین که الفبای آن دارای علائم آغاز و پایان است. به طوری که حرکت با دیدن علامت آغاز صرفا به سمت راست و با علامت پایان صرفا به سمت چپ است

به دیگر سخن محاسبات لازم نیاز به فضائی خارج از ورودی اولیه ندارد.

مثال $a^n b^n c^n, n \geq 1$

قوی‌تر از خ‌پ

مسئلهٔ توقف

ماشین تورینگ رشتهٔ ورودی داده شده را می‌پذیرد یا خیر

$ATM = \{(M,w)|$ ماشین تورینگ M و رشتهٔ w را می‌پذیرد. $M\}$

تشخیص‌پذیر

منابع

[سیپسر]

[اینز]

“